

ΑΓΜΑ (MEM-100) – Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma} = \mu \vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda - \mu = 1$.

Άσκηση 2. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\vec{A\Delta} = \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma}$ και $\vec{A\Xi} = \lambda \vec{AB} + \kappa \vec{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{A\Xi} \parallel \vec{B\Gamma}$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και δύο σημεία E και Z τέτοια ώστε $\vec{A\Xi} = \kappa \vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Xi} = \lambda \vec{AB}$, όπου $\lambda = \frac{\kappa}{\kappa-1}$ με $\kappa \neq 1$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4. Δίνονται σημεία A, B, Γ . Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{M\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο του M .

Άσκηση 5. Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

(a) Να δείξετε ότι το κέντρο βάρους G είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

(b) Αν $A = (-2, 1)$, $B = (1, 4)$ και $G = (2, -3)$, τότε να βρείτε τα σημεία Γ, Δ .

Άσκηση 6. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A = (1, 0)$, $B = (-\mu^2, 3)$ και $\Gamma = (-5\mu, 9)$ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 7. Σχεδιάστε τα σύνολα του επιπέδου των οποίων τα σημεία $M = (x, y)$ ικανοποιούν:

$$(a) |x| = 2, \quad (b) |x| < 2, \quad (c) |y| > 2, \quad (d) |x| = |y|.$$

Άσκηση 8. (i) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2, 2\lambda^2 - 3\lambda - 2)$, $\vec{\beta} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, -3\lambda^2 + 7\lambda - 2)$ να είναι ίσα.

(ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$, $\vec{\beta} = (4, x)$ να είναι ομόρροπα.

Άσκηση 9. Έστω $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ δύο μη παράλληλα διανύσματα και $\vec{\gamma}$ τυχαίο τρίτο διάνυσμα. Να δείξετε ότι το $\vec{\gamma}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

Άσκηση 10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$. Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$ σε 2 κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

Άσκηση 11. Αν $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2)$ και $\vec{w} = (6, 0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $|(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}|$ και $(|\vec{u}|\vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Άσκηση 12. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{\alpha} = (3, -2)$ και έχουν μέτρο 1.

Άσκηση 13. Έστω $\vec{\alpha} = (\kappa, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, 3)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε να ισχύει

(i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, (ii) $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{4}$, (iii) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Άσκηση 14. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Άσκηση 15. Να εξετάσετε τότε ισχύει (i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, (ii) $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

Άσκηση 16. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$. Δείξτε ότι το $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Άσκηση 17. (i) Δείξτε ότι $-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

(ii) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $3 \cos \theta + 4 \sin \theta$.